

Title	Metrisationノ一問題
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 76 p.21-p.30
Issue Date	1936-01-31
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74258
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

335. Metrisation ノ 一問題

角 谷 静 夫 (阪大)

空間 R_1 が *metrisch* デアレバソノ任意ノ部分集合 R_2 ハコレヲ空間ト考ヘレバ *metrisch* デアル。 R_2 ノ *Metrik* ρ_2 ヲ R_1 ノ *Metrik* ρ_1 ト同ジモノニ取レバヨイ。今 R_2 ノ *Metrik* ρ_2 が任意 = (ρ_1 ト異ナルモノニ依ツテ) 與ヘラレテキルトキ ρ_2 ヲ R_2 全体ヘ *fortsetzen* スルコトが出来ルデアロウカ? 勿論 ρ_2 ハ R_2 ニ於イテ ρ_1 ト *äquivalent*¹⁾ デアルモノトシ、 ρ_2 ヲ R_2 全体ヘ *fortsetzen* シテ得ラレル $\rho_2^* \in R_1$ = 於テ ρ_1 ト *äquivalent*

デアルモノヲ求メルモノトスル。

コノ問題ハ必ずしも常ニ可能デハナイ。例ヘバ R_1 ヲ實数全体, R_2 ヲ $-1 < x < +1$ ナル實数全体トシ

$$\rho_1(x, x') = |x - x'|,$$

$$\rho_2(x, x') = \left| \frac{x}{1-|x|} - \frac{x'}{1-|x'|} \right|$$

トオケバ ρ_2 ハ R_1 全体ヘ ρ_1 ト *äquivalent* = ナルヤウ = *fortsetzen* スルコトハ出来ナイ。コノ例ニ於イテハ ρ_2 ハ R_2 = 於テ有界デナイコトが不能ノ原因デアッタが脚註1)ノ場合ハ ρ_2 ハ R_2 = 於テ有界デアルガモハリ ρ_2 ヲ R_1 全体ヘ ρ_1 ト *äquivalent* = ナルヤウ = *fortsetzen* スルコトハ出来ナイ。

然ラバ如何ナル場合ニ *Fortsetzung* が可能デアルカ?。コレニ對シテ次ノ定理が成立スル。

定理I. R_1 が *metrisch*, R_2 がソノ部分空間デ R_1 = 於テ開デ且ツ *kompakt* デアレバ任意ノ R_2 ノ *Metrik* ハ R_1 全体ヘ *fortsetzen* スルコトが出来ル。

1) ニツノ *Metrik* が *äquivalent* デアルト云フハソノ各々ニヨツテ定メラレル近傍系が *topologisch äquivalent* ナルコトデアル。

例ヘバ Gauss 平面上ノ單位円周ヲ R_1 , $\rho_1(z, z') = |z - z'|$ トシ, R_1 ヨリ $z=1$ ヲ取り去ツタ残りノ集合ヲ R_2 , ソノ *Metrik* ヲ

$$\rho_2(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = |\theta - \theta'|$$

トスレバ ρ_1 ト ρ_2 トハ R_2 = 於テ *äquivalent* デアル。

定理 I の例へば R_1 が *kompakt* で R_2 が R_1 で開
 が居れば成立スル。しかし、この際更ニ次ノ一般ノ定理が
 成立スル。

定理 II R_1 が *metrisch, im kleinen kompakt*
 で、 R_2 がその部分空間で R_1 に於て開が居れば任意ノ
 R_2 ノ *Metrik* ハ R_1 全体へ *fortsetzen* スルコトが出
 來ル。

定理 I ノ証明: R_1 ノ *Metrik* が ρ_1 , R_2 ノ *Metrik*
 が ρ_2 = ヨツテ與ヘラレタトセヨ。先ヨ適當ニ R_1 ノ *Metrik*
 ヲツケカヘテ新シイ *Metrik* ρ_1^* ヲ作レバ R_2 = 屬スル任
 意ノ x, y = 對シテ $\rho_1^*(x, y) \geq \rho_2(x, y)$ トナルコトヲ
 証明スル。

コノ爲ニハ次ノ條件ヲ満足スル函数 $h^*(t)$ ヲ作ツテ
 $\rho_1^*(x, y) = h^*(\rho_1(x, y))$ ト置ケバヨイ。

1° $h^*(t)$ ハ $t \geq 0$ = テ定義サレテ $h^*(0) = 0$, $t > 0$ +
 ルトキ $h^*(t) > 0$

2° $\lim_{t \rightarrow 0} h^*(t) = 0$

3° $h^*(t)$ ハ $t \downarrow 0$ + ルトキ 單調非増加,

4° $t_1, t_2, t_3 > 0$, $t_1 + t_2 \geq t_3$ + ラバ

$$h^*(t_1) + h^*(t_2) \geq h^*(t_3)$$

5° $h^*(t)$ ハ $t \geq 0$ = テ t ノ 連続函数

6° $x, y \in R_2$ + ルトキ $h^*(\rho_1(x, y)) \geq \rho_2(x, y)$

R_2 ハ *kompakt* で且ツ R_1 に於て開が居ルカラ (即

\neq in sich kompakt \Rightarrow アルカラ) $x, y \in R_2$ ナルトキ
 $\rho_2(x, y)$ ノ上限 M ハ有限 \Rightarrow アル。故 $\Rightarrow x, y \in R_2$,
 $\rho_1(x, y) = t$ ナルアラユル x, y ノ組 \Rightarrow 對スル $\rho_2(x, y)$ ノ上
 限ヲ $h(t)$ \Rightarrow 表ハセバ $h(t)$ ハ $0 \leq t < \delta_1(R_2)^{2)}$ ナルスベ
 テノ t \Rightarrow 對シテ定義サレテ $h(0) = 0, 0 < t < \delta_1(R_2)$ ナルト
 キ $0 < h(t) \leq M$ \Rightarrow アル。 $t \geq \delta_1(R_2)$ ナルトキハ $h(t) = M$
 ト置ク。

$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ ナルコトヲ示サシ。若シ $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \nRightarrow$

ナケレバ $h(t) \geq 0$ \Rightarrow アルカラ $\overline{\lim_{t \rightarrow 0} h(t)} > 0$ トナル。即チ

$t_n \downarrow 0$ ナル $t_n =$ 對シテ $h(t_n) > 2\delta$ ナル $\{t_n\}, \delta > 0$ が存
 在スル。

故 $\Rightarrow h(t)$ ノ定義ヨリ

$x_n, y_n \in R_2, \rho_1(x_n, y_n) = t_n, \rho_2(x_n, y_n) > \delta$

ナル $x_n, y_n (n=1, 2, \dots)$ が存在スル。 R_2 ハ in sich
 kompakt \Rightarrow アルカラ x_n ノ適當ナ Teilfolge x_{n_ν} ヲ
 取レバ $x_{n_\nu} \rightarrow x_0, x_0 \in R_2$ トナル。 $\rho_1(x_{n_\nu}, y_{n_\nu}) = t_{n_\nu} \rightarrow 0$
 \Rightarrow アルカラ $y_{n_\nu} \rightarrow x_0$ \Rightarrow アル。コレハ $\rho_2(x_{n_\nu}, y_{n_\nu}) > \delta$ ナ
 ル假定 \Rightarrow 矛盾スル。

$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ \Rightarrow アルカラ

$$\overline{h(t)} = 0. G. h(s) \dots \dots \dots (1)$$

2) $\delta_1(R_2)$ ハ $x, y \in R_2$ ナルスベテノ x, y \Rightarrow 關スル $\rho_1(x, y)$ ノ上限
 ヲ表ハス。

トオケバ $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{h}(t) = 0$. デ且ツ $t \downarrow 0$ ナルトキ $\bar{h}(t)$ ハ單調減少デアアル。

次ニ

$$h^*(t) = t \cdot \left(O. G. \frac{\bar{h}(s)}{s} \right)_{s \geq t} \text{----- (2)}$$

トオク。コノ $h^*(t)$ が先ノ條件 1°—6°ヲ満足スルコトヲ示サウ。 $\bar{h}(t)$, $h^*(t)$ ノ定義 (1), (2) ヨリ直チニ

$$h^*(t) \geq \bar{h}(t) \geq h(t)$$

ヲ得ルカラ 1°, 6°ハ明カデアアル。

2°ノ証明 $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{h}(t) = 0$ デアルカラ任意ノ $\varepsilon > 0 =$ 對シテ $\delta > 0$ が定マツテ $0 < t < \delta$ ナルトキ $\bar{h}(t) < \varepsilon$.

$$\text{スルト } t < \frac{\delta \cdot \varepsilon}{M} \text{ ナルトキ}$$

$$\begin{aligned} h^*(t) &= t \cdot \left(O. G. \frac{\bar{h}(s)}{s} \right)_{s \geq t} \\ &= t \cdot \text{Max.} \left\{ \left(O. G. \frac{\bar{h}(s)}{s} \right)_{s \geq \delta}, \left(O. G. \frac{\bar{h}(t)}{t} \right)_{\delta > s \geq t} \right\} \\ &\leq t \cdot \text{Max.} \left\{ \frac{M}{\delta}, \frac{\varepsilon}{t} \right\} = \text{Max.} \left\{ \frac{tM}{\delta}, \varepsilon \right\} = \varepsilon \end{aligned}$$

3°ノ証明 $t_1 > t_2$ トスルバ

$$O. G. \frac{\bar{h}(s)}{s} = \frac{h^*(t_1)}{t_1} < \frac{h^*(t_1)}{t_2},$$

$$O. G. \frac{\bar{h}(s)}{s} \leq \frac{\bar{h}(t_1)}{t_2} \leq \frac{h^*(t_1)}{t_2}$$

デアルカラ

$$h^*(t_2) = t_2 \cdot \text{Max} \left\{ \left(\text{O.G.} \frac{\bar{h}(s)}{s} \right)_{s \geq t_1}, \left(\text{O.G.} \frac{\bar{h}(s)}{s} \right)_{t_1 \leq s \leq t_2} \right\} \leq h^*(t_1)$$

4°ノ証明 $h^*(t)$ ノ定義ヨリ

$$h^*(t_1) = t_1 \cdot \left(\text{O.G.} \frac{\bar{h}(s)}{s} \right)_{s \geq t_1} \geq t_1 \left(\text{O.G.} \frac{\bar{h}(s)}{s} \right)_{s \geq t_1+t_2} = \frac{t_1}{t_1+t_2} \cdot h^*(t_1+t_2)$$

同様ニ

$$h^*(t_2) \geq \frac{t_2}{t_1+t_2} h^*(t_1+t_2)$$

故ニ

$$\begin{aligned} h^*(t_1) + h^*(t_2) &\geq h^*(t_1+t_2) \\ &\geq h^*(t_3). \quad (t_1+t_2 \geq t_3 \text{ 及 } \exists^0 = \exists \text{ ヲ}) \end{aligned}$$

5°ハ 2°, 3°, 4°ヨリ容易ニ得ラレル。

$\rho_1^* = h^*(\rho_1)$ ヲ此ノ如ク定義シテカラ定理Iノ証明ノ本筋ニ入ル。 R_2 ヲ R_1 内ノ集合ト考ヘレバ

$$R_1 = I(R_2) + F(R_2) + E(R_2), \quad R_2 = I(R_2) + F(R_2)$$

トワケルコトが出来ル。ココニ $I(R_2)$ ハ R_2 ノ内点ノ集合、 $F(R_2)$ ハ境界、 $E(R_2)$ ハ外点ノ集合デアアル。第二ノ等式ハ R_2 ガ R_1 ニテ開デテキルカラ成立スル。

x, y ヲ R_1 ノ任意ノ二点トスルトキ $\rho_2^*(x, y)$ ヲ

$$\rho_2^*(x, y) = \text{u.g.} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(Z_i, Z_{i+1}) \dots \dots \dots (3)$$

ニ依ッテ定義スル。ココニ $Z_0 = x, Z_n = y$ トオキ Z_1, Z_2, \dots

....., z_{n-1} は R_1 内ノ任意ノ点デアリ且ツ

$$z_i, z_{i+1} \in R_2 \text{ ナルトキ } p(z_i, z_{i+1}) = p_2(z_i, z_{i+1})$$

コレ以外ノ場合、即チ z_i 又ハ $z_{i+1} \in R_2 - R_1 = E(R_2)$ ナルトキ

$$p(z_i, z_{i+1}) = p_1^*(z_i, z_{i+1})$$

ト定メル。U.G. ハカナル $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\} (n=1, 2, \dots)$ 全体ニ對スル下限ヲ表ハスモノトスル。

次ニ此ノ如ク定義サレタ $p_2^*(x, y)$ が所要ノ $p_2(x, y)$ ノ Fortsetzung デアルコトヲ示スノデアルが、ソノ前ニ $p_2^*(x, y)$ ノ定義ハ次ノ如ク簡單ニ述べラレルコトヲ証明シヨウ。³⁾

$$(i) \quad x, y \in R_2 \text{ ナルトキハ } p_2^*(x, y) = p_2(x, y)$$

$$(ii) \quad x \in R_2, y \in R_1 - R_2 \text{ ナルトキハ}$$

$$p_2^*(x, y) = p_2^*(y, x) = \text{U.G.} \left\{ p_2(x, z) + p_1^*(z, y) \right\}_{z \in R_2}$$

$$(iii) \quad x, y \in R_2 - R_1 \text{ ナルトキハ}$$

$$p_1^*(x, y) = \text{Min.} \left[\text{U.G.} \left\{ p_1^*(x, z_1) + p_2(z_1, z_2) + p_1^*(z_2, y) \right\}, p_1^*(x, y) \right]_{z_1, z_2 \in R_2}$$

(i) ノ証明 コノ爲ニハ $x, y \in R_2$ ナルトキ任意ノ z_1, z_2, \dots ,

$$z_{n-1} \in R_1 \text{ = 對シテ}$$

$$p_2(x, y) \leq \sum_{i=0}^{n-1} p(z_i, z_{i+1}) \quad z_0 = x, z_n = y \text{ ----- (4)}$$

3) $p_2^*(x, y)$ ノ定義ヲ始メニ複雑ニ形デ定義シタノハ $p_2^*(x, y)$ = 關スル距離ノ三角關係ノ成立ノ証明ヲ簡單ニスルタメデアル。

ナルコトヲ証明スレバヨイ。 $Z_i (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ が
 スベテ R_2 = 属シテ居レバ $\rho(Z_i, Z_{i+1}) = \rho_2(Z_i, Z_{i+1})$
 $(i=0, 1, \dots, n-1)$ デアルカラ (4) ヲ $\rho_2(x, y) =$ 関ス
 ル三角不等式ヨリ明カデアアル。 $Z_i (i=1, 2, \dots, n-1)$
 ノうち $R_1 - R_2 =$ 属スルモノガアレバ $Z_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$
 カラコレヲ除イタモノヲ順ニ $Z_{i_0} = Z_0 = x, Z_{i_1}, Z_{i_2}, \dots$
 $\dots, Z_{i_{k-1}}, Z_{i_k} = Z_n = y$ トオク。

今 $i_{j+1} > i_j + 1$ デアレバ

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_j}^{i=i_{j+1}-1} \rho(Z_i, Z_{i+1}) &= \sum_{i=i_j}^{i=i_{j+1}-1} \rho_1^*(Z_i, Z_{i+1}) \\ &= \sum_{i=i_j}^{i=i_{j+1}-1} h^*(\rho_1(Z_i, Z_{i+1})) \\ &\geq h^*\left(\sum_{i=i_j}^{i=i_{j+1}-1} \rho_1(Z_i, Z_{i+1})\right) \quad (4^\circ = \exists \vee) \\ &\geq h^*(\rho_1(Z_{i_j}, Z_{i_{j+1}})) \quad (\rho_1, \text{三角不等式及} 2^\circ = \exists \vee) \\ &\geq \rho_2(Z_{i_j}, Z_{i_{j+1}}) \quad (6^\circ = \exists \vee) \end{aligned}$$

故ニ

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(Z_i, Z_{i+1}) &\geq \sum_{j=0}^{j=k-1} \rho_2(Z_{i_j}, Z_{i_{j+1}}) \\ &\geq \rho_2(Z_{i_0}, Z_{i_k}) = \rho_2(x, y) \quad (\rho_2, \text{三角不等式} = \exists \vee) \end{aligned}$$

(ii), (iii) モ同様ニスレバ証明デアルカラ証明ハ省略スル。

(i) = ヲツテ $x, y \in R_2$ ナルトキハ $\rho_2^*(x, y) = \rho_2(x, y)$
 ナルコトガワカツタカラ $\rho_2^*(x, y)$ が所要ノモノデアルコ

トヲ示スルメハ

(I) $\rho_2^*(x, y)$ が距離ノ三公準ヲ満スコト。

(II) R_1 テ考ヘテ $\rho_2^*(x, y)$ ト $\rho_1^*(x, y)$ (又ハ $\rho_1(x, y)$)
が *topologisch äquivalent* ナルコト。

ヲ証明スルベヨイ。

(I)ハ三角不等式ハ定義 (3) ヨリ明カデアアルシ、其他ノ二ツノ公準ハ (i), (ii), (iii) ヨリ明カデアアル。

(II)ノ証明 $x_0 \in I(R_2)$ ナル点ノ適當ノ近傍ニテハ (i) ヨリ $\rho_2^* = \rho_2 = \rho_1$ ナルカラ ρ_2^* ハ ρ_1 ト *äquivalent* デアル。

$x_0 \in E(R_2)$ ナル点ノ適當ナル近傍ニテハ (ii), (iii) ヨリ

$\rho_2^* = \rho_1^*$ デアル。

故ニ $x_0 \in F(R_2)$ ナルトキ

(a) $\rho_1^*(x_0, y_n) \rightarrow 0$ ナラバ $\rho_2^*(x_0, y_n) \rightarrow 0$

(b) $\rho_2^*(x_0, y_n) \rightarrow 0$ ナラバ $\rho_1^*(x_0, y_n) \rightarrow 0$

ナルコトヲ示スルベヨイ。然ルニ ρ_2^* ノ定義ヨリ $\rho_2^* \leq \rho_2$ 又 ρ_1^* デアルツテ $\rho_2 \leq \rho_1^*$ デアルカラ $\rho_2^* \leq \rho_1^*$ 。(a)ハコレヨリ明カデアアル。(b)ハ $y_n \in E(R_2)$ ナルトキノミ証明スルベヨイ。

$y_n \in E(R_2)$ ナラバ (ii) ヨリ $z_n \in R_2$ が存在シテ

$$\rho_2(x_0, z_n) + \rho_1^*(z_n, y_n) < 2\rho_2^*(x_0, y_n) \rightarrow 0$$

故ニ $\rho_2(x_0, z_n) \rightarrow 0, \rho_1^*(z_n, y_n) \rightarrow 0$ 。

R_2 ニテ ρ_2 ト ρ_1 シタガツテ ρ_1^* が *äquivalent* デアルカラ最初ノ式ヨリ

$$\rho_1^*(x_0, z_n) \rightarrow 0$$

後、式(1)組合ハシテ

$$\rho_1^*(x_0, y_n) \rightarrow 0$$

ヲ得ル。(定理Iノ証明終リ)